



Modèle d'Ordre Réduit pour les Équations de Saint-Venant 2D

Conservation, Positivité et Clôture par Apprentissage

Conférence *Eau & Intelligence Artificielle* — Février 2026

CORAL-SWE : Conservative Reduced-Order And Learning Shallow Water Engine

Abdessamad MOUSSADDAK^{1,2,3,4}, A. DECOENE², C. GOEURY⁵, A. PONÇOT¹, T. TADDEI⁶

¹ EDF Lab Paris-Saclay, EDF R&D, Palaiseau, France

² Univ. Bordeaux, CNRS, Bordeaux INP, IMB (UMR 5251), Talence, France

³ Inria Bordeaux Sud-Ouest, Centre Inria Univ. Bordeaux, Talence, France

⁴ École Doctorale de Mathématiques, Univ. Bordeaux, France

⁵ LHSV, ENPC, IP Paris, EDF R&D, Chatou, France

⁶ Sapienza University of Rome, Dept. of Mathematics, Rome, Italy

Plan de la présentation

1. Contexte et Motivation
2. Modèle Haute Fidélité (CORAL-SWE)
3. Stratégie Hybride de Réduction
4. Correction Physique
5. Résultats numériques
6. Conclusions et Perspectives

Section 1

Contexte et Motivation

Modélisation hydraulique à EDF

- Crues, ruptures de barrage, submersion côtière
 - Solveur de référence : **TELEMAC-2D** (EF distributifs)
 - Maillages non-structurés, pas de temps fins
- ⇒ **Plusieurs heures** par simulation

Verrou : Quantification d'incertitudes, optimisation ⇒ **milliers** de simulations. Coût **important**.

Objectif

Construire un **Modèle d'Ordre Réduit** (MOR) fidèle, stable et **10×** à **100×** plus rapide.

- 📎 Les opérateurs de TELEMAC-2D sont difficiles à extraire ⇒ nécessité d'un solveur dédié à la phase en ligne (CORAL-SWE).

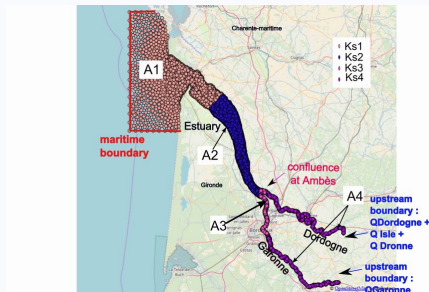


Figure: Estuaire de la gironde

Section 2

Modèle Haute Fidélité (CORAL-SWE)

Équations de Saint-Venant 2D — Solveur Volumes Finis

Forme conservative continue

$$\partial_t \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}_b(\mathbf{q}, b) + \mathbf{S}_f(\mathbf{q})$$

avec $\mathbf{q} = (h, hu, hv)^\top$

h Profondeur d'eau

$\mathbf{u}$ Vitesse moyennée $(u, v)^\top$

$b(\mathbf{x})$ Bathymétrie

$\mathbf{S}_b$ Source topographique

$\mathbf{S}_f$ Frottement (Strickler, C_{str})

Forme semi-discrète : $\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathcal{L}(\mathbf{Q})$

Le CORAL-SWE est conçu comme **pour l'étape en ligne**, pas comme un générateur de données.

Propriétés-clés du solveur CORAL-SWE

- **Flux HLLC** + invariance rotationnelle
- **Reconstruction hydrostatique**
- **Frottement semi-implicite**
- Positivité **garantie** ($h \geq 0$)
- **Compatible** projection Galerkin

Validation du solveur CORAL-SWE

Cas-tests de référence

Cas-test	Propriété validée
Bosse subcritique	C-propriété, $O(h)$
Bosse frictionnelle	Éq. pression/frottement
Stoker (humide)	Choc et raréfaction
Ritter (fond sec)	Positivité, front mobile
Thacker 2D	Shoreline, conservation

CORAL-SWE vs Sol. exacte & TELEMAC

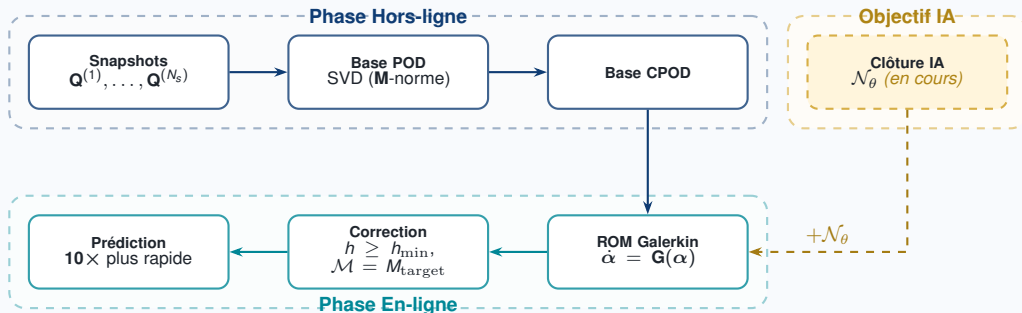
Err. rel.	Sol. exacte	TELEMAC
$L_1(h)$	9.1e-3	1.15e-2
$L_2(h)$	4.6e-2	5.40e-2
$L_1(u)$	1.7e-2	2.30e-2

✓ **Bilan** : Précision **comparable** à TELEMAC-2D sur les 5 cas-tests, validant ainsi une base **fiable** pour la réduction.

Section 3

Stratégie Hybride de Réduction

Architecture de la réduction de modèles hybride



✓ Périmètre de cette présentation

Solveur CORAL-SWE (VF), base CPOD, corrections ($\mathcal{M}, h \geq h_{\min}$).

➤ Cible ROM-IA

Augmenter CORAL-SWE $\mathbf{G}(\alpha)$ par $\mathcal{N}_\theta(\alpha)$ pour compenser l'écart TELEMAC/CORAL-SWE et la troncature.

Objectif ROM-IA : le terme de clôture $\mathcal{N}_\theta$

Deux sources d'erreur structurelles

1. **écart** : snapshots TELEMAC (EF) $\neq$ solveur CORAL-SWE (VF).
2. **Troncature** : modes $k > r$ ignorés $\Rightarrow$ énergie non-capturée.

Indicateur d'erreurs

$\eta = \mathcal{E}_{\text{pred}} / \mathcal{E}_{\text{proj}} > 1$ sans clôture, surtout cas frictionnels et zones sèches.

$\mathcal{N}_\theta$ complète la physique — pas un substitut.

ROM augmenté (cible)

Actuel : $\dot{\alpha} = \mathbf{G}(\alpha)$

ROM-IA visé :

$$\dot{\alpha} = \mathbf{G}(\alpha) + \underbrace{\mathcal{N}_\theta(\alpha)}_{\text{réseau appris}}$$

Entraînement sur le résidu :

$$\mathcal{N}_\theta(\alpha) \approx \dot{\alpha}_{\text{FOM}} - \mathbf{G}(\alpha)$$

✓ Objectif : $\eta \rightarrow 1$ ✓ pour paramètres hors base d'apprentissage.

Décomposition POD et Base Conservative (CPOD)

Procédure POD standard

1. Snapshots centrés :

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{Q}^{(1)} - \bar{\mathbf{Q}}, \dots, \mathbf{Q}^{(N_s)} - \bar{\mathbf{Q}}]$$

2. SVD pondérée ($\mathbf{M}$ -norme) :

$$\mathbf{Z}_r = [\phi_1, \dots, \phi_r], \quad \mathbf{Z}_r^\top \mathbf{M} \mathbf{Z}_r = \mathbb{I}_r$$

3. Approximation : $\mathbf{Q}(t) \approx \bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Z}_r \alpha(t)$

Extension conservative (CPOD)

Pour systèmes ouverts ($Q_{\text{in}} \neq Q_{\text{out}}$) :

1. Direction de masse : $\hat{\zeta} = \zeta / \|\zeta\|_{\mathbf{M}}$

2. Déflation : $\mathbf{Y}_\perp = \mathbf{Y} - \langle \mathbf{Y}, \hat{\zeta} \rangle_{\mathbf{M}} \hat{\zeta}$

3. Base augmentée :

$$\mathbf{Z}_r = [\hat{\zeta}, \phi_1^\perp, \dots, \phi_{r-1}^\perp]$$

✓ **Résultat CPOD** : Conservation de $\mathcal{M}$ **exacte** (précision machine) **sans dégradation** de l'approximation.

Projection de Galerkin

Système réduit d'EDO

$$\mathbf{Z}_r^\top \mathbf{M} \mathbf{Z}_r \dot{\alpha} = \mathbf{Z}_r^\top \mathbf{M} \mathcal{L}(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Z}_r \alpha) \xrightarrow{\mathbf{Z}_r^\top \mathbf{M} \mathbf{Z}_r = \mathbb{I}_r} \boxed{\dot{\alpha} = \mathbf{G}(\alpha)} \text{ avec } \alpha(0) = \mathbf{Z}_r^\top \mathbf{M} (\mathbf{Q}_0 - \bar{\mathbf{Q}})$$

Métriques d'erreur

Projection (borne inf.) :

$$\mathcal{E}_{\text{proj}} = \frac{(\int_0^T \varepsilon_{\text{proj}}^2 dt)^{1/2}}{(\int_0^T \|\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{Q}}\|_{\mathbf{M}}^2 dt)^{1/2}}$$

Prédiction (en-ligne) :

$$\mathcal{E}_{\text{pred}} = \frac{(\int_0^T \varepsilon_{\text{pred}}^2 dt)^{1/2}}{(\int_0^T \|\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{Q}}\|_{\mathbf{M}}^2 dt)^{1/2}}$$

Indicateur $\eta(r) = \mathcal{E}_{\text{pred}} / \mathcal{E}_{\text{proj}}$

Accumulation d'erreurs dynamiques :

✓ $\eta \approx 1$: ROM optimal.

✗ $\eta \gg 1$: ROM non optimal.

η dépend du cas : < 10

✓ **Sans $\mathcal{N}_\theta$** : dérive maîtrisée ($\eta < 10$ pour un cas sans zones sèches).

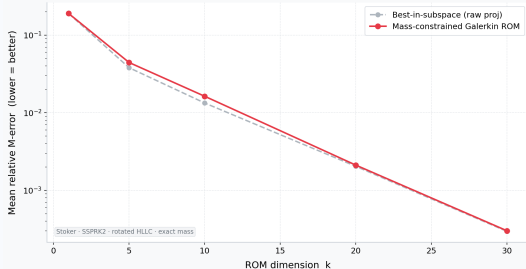
➤ **Avec $\mathcal{N}_\theta$** : objectif $\eta \rightarrow 1$.

Résultats — Cas Stoker

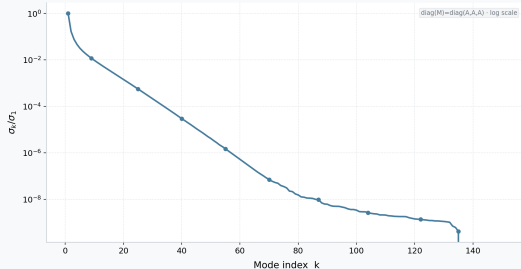
Configuration du cas Stoker 2D

Canal rectangulaire fermé, solveur CORAL-SWE.
ROM POD *mass-weighted* avec conservation exacte.

Time-averaged reconstruction error vs ROM dimension



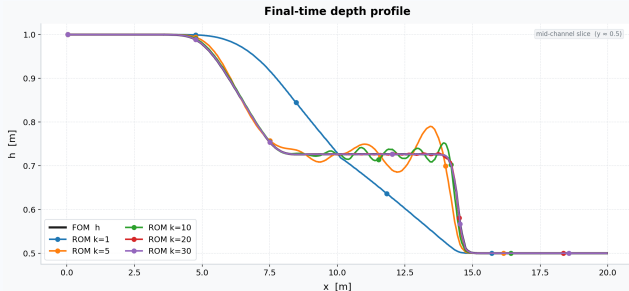
Mass-weighted POD spectrum (normalized singular values)



Résultats — Cas Stoker

Configuration du cas Stoker 2D

Canal rectangulaire fermé, solveur CORAL-SWE.
ROM POD *mass-weighted* avec conservation exacte.



Bilan des performances

- ✓ Masse conservée (précision machine)
- ✓ Aucune profondeur négative
- ✓ Convergence vers projection optimale
- ✓ Spectre POD décroissant rapidement

✓ **Conclusion :** Le modèle réduit conserve strictement les propriétés physiques tout en gardant une excellente précision spectrale.

Section 4

Correction Physique

Double défi : conservation de masse & positivité

✗ Problème #1 : Conservation

La base POD classique ignore la direction masse.

✗ **POD** : erreur oscille ~ 0.06 kg.

✓ **CPOD** : erreur $\sim 10^{-11}$ kg.

✗ Problème #2 : Positivité de h

$\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Z}_r \alpha$ peut produire $h < 0$:

✗ Oscillations de Gibbs aux fronts secs.

✗ $\mathbf{S}_f \propto h^{-4/3}$ **singulier**.

⇒ **Explosion numérique** immédiate.

📎 **Solution proposée : Algorithme de Correction Préservant la Positivité et la Masse**

$$h \geq h_{\min}$$

ET

$$\mathcal{M}(\alpha) = M_{\text{target}}$$

Correction *a posteriori* : algorithme et résultats

► Problème d'optimisation

$$\min_{\alpha} \|\alpha - \alpha^*\|_2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} h(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Z}_r \alpha) \geq h_{\min} \\ \mathcal{M}(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Z}_r \alpha) = M_{\text{target}} \end{cases}$$

► Algorithme alterné

```
1:  $M_{\text{target}} \leftarrow \mathcal{M}(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Z}_r \alpha^*)$ 
2:  $\alpha \leftarrow \alpha^*$ 
3: for  $k = 1 \dots K_{\max}$  do
4:    $h \leftarrow \max(h, h_{\min})$ 
5:    $\Delta m \leftarrow M_{\text{target}} - \mathcal{M}(\alpha)$ 
6:   if  $|\Delta m| < \epsilon$  then
7:     stop
8:   end if
9:    $\alpha \leftarrow \alpha + \frac{\Delta m}{\|\mathbf{w}\|_2^2} \mathbf{w}$ 
10: end for
 $\mathbf{w} = \mathbf{Z}_{r,h}^\top \mathbf{A}$ 
```

► Résultats

Cas frictionnel ($r = 20$)

- ✗ Sans : explosion $t \approx 51\text{s}$
- ✓ Avec : $T = 120\text{s}$, masse 10^{-14}

Ritter (fond sec)

- ✓ Pas de $h < 0$
- ✓ Masse exacte

Impact précision

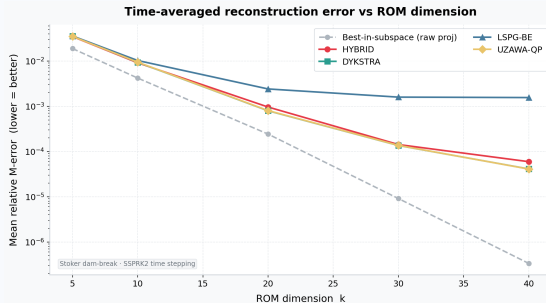
$$\rho = \frac{\mathcal{E}_{\text{clip}}}{\mathcal{E}_{\text{clip}+\text{mass}}} \approx 1$$

correction neutre

Section 5

Résultats numériques

Comparaison — Cas Ritter (fond sec)



Erreur ROM vs CORAL-SWE en fonction de r .

✓ **Conclusion** : La méthode **Hybride** offre le meilleur compromis (précision / coût / robustesse), au plus près de ℓ_2 optimale.

Bilan comparatif

Méthode	Précis.	$\mathcal{M}$	Coût
Hybride	***	✓	Faible
Dykstra	***	✓	Moyen
Uzawa-QP	**	✓	Élevé
LSPG-BE	*	✓	Moyen

Validation 2D — Thacker

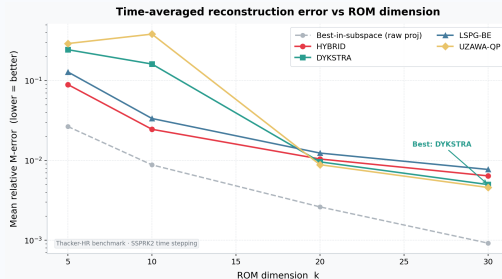
Cas-test

- Cuvette parabolique, surface oscillante.
- Shoreline **mobile** (mouillage/assèchement).
- Solution analytique connue.

Performances (CPOD + Hybride)

- ✓ $\eta \in [3, 4.5]$
(2D avec shoreline $\Rightarrow$ plus sévère qu'en 1D.)
- ✓ Positivité corrigée **sans dérive**.
- ✓ $\mathcal{M}$ conservée ($\sim 10^{-12}$ kg).

✓ **Front mobile 2D** : Convergence monotone. Erreur de correction **négligeable**. η plus élevé $\Rightarrow$ besoin confirmé de $\mathcal{N}_\theta$.



Convergence de l'erreur en fonction de r .

Section 7

Conclusions et Perspectives

✓ Acquis : socle physique robuste

- ✓ **Solveur CORAL-SWE** : bien-équilibré, positif, 5 cas-tests validés.
- ✓ **Base CPOD** : $\mathcal{M}$ exacte en système ouvert.
- ✓ **Méthode Hybride** : $h \geq h_{\min}$, $\mathcal{M} = M_{\text{target}}$, sans perte de précision.
- ✓ **Stabilité** : $\eta < 10$.

↗ Perspectives : hybridation IA

- ✓ **Clôture** $\mathcal{N}_\theta$: apprendre $\mathbf{R} = \dot{\alpha}_{\text{FOM}} - \mathbf{G}(\alpha)$ pour $\eta \rightarrow 1$.
- **Paramétrisation** : rugosité (C_{str}), bathymétrie.
- **Intégration** : TELEMAC-2D pour les études d'inondation.

ROM corrigée: fiable, préserve la propriété physique par construction, et **prêt à être augmenté par un réseau de neurones** pour l'hydraulique industrielle.

Merci pour votre attention !

Questions & Discussion

Abdessamad Moussaddak

EDF R&D | Inria Centre Bordeaux

`abdessamad.moussaddak@edf.fr`

CORAL-SWE | Conférence Eau & IA | Février 2026

Références Clés

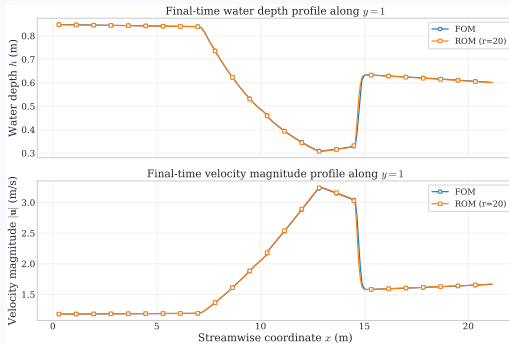
- **P. Benner, S. Gugercin, & K. Willcox** (2015). *A survey of projection-based model reduction methods for parametric dynamical systems*. **SIAM Review**, 57(4), 483–531. — Foundation théorique pour les ROM paramétrés.
- **E. Audusse, F. Bouchut, M. O. Bristeau, R. Klein, & B. Perthame** (2004). *A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows*. **SIAM Journal on Scientific Computing**, 25(6), 2050–2065. — Schémas bien-équilibrés pour Saint-Venant.
- **E. Qian, B. Kramer, B. Peherstorfer, & K. Willcox** (2020). *Lift & Learn: Physics-informed machine learning for large-scale nonlinear dynamical systems*. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, 406, 132401. — Clôtures par apprentissage machine pour ROM.
- **T. Taddei, M. Discacciati, & A. Quarteroni** (2018). *Nonconforming coupled multiphysics reduced order models*. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 330, 98–118. — ROM hybrides pour systèmes couplés conservatifs.

Annexe — Cas Frictionnel

✗ **Sans correction** : explosion à $t \approx 51$ s.

✓ **Avec Hybride ($r=20$)** :

- Calcul complet jusqu'à $T = 120$ s.
- $\mathcal{M}$ relative à $\sim 10^{-14}\%$.
- Superposition parfaite à la solution haute fidélité.



Profil de surface à $t = 120$ s.

Annexe — Détails de la Méthode Hybride

► **Correction en 4 étapes** (appliquée sur α_{unc} à chaque pas t^n)

1. **Polissage de $\mathcal{M}$ (espace réduit) :** $\alpha^{(1)} = \alpha_{\text{unc}} + \frac{M_{\text{target}} - \mathcal{M}(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Z}_r \alpha_{\text{unc}})}{\|\mathbf{w}\|_2^2} \mathbf{w}$
2. **Reconstruction & sanitisation :** $h_i^* = \max(h_i^{(1)}, h_{\min})$ (+ annulation du moment si zone sèche)
3. **Redistribution sur Ω_{wet} :** $h_i^{**} = h_i^* - \Delta M / \sum_{j \in \Omega_{\text{wet}}} |K_j|$
4. **Reprojection M-pondérée :** $\alpha^+ = \mathbf{Z}_r^\top \mathbf{M}(\mathbf{q}^{**} - \bar{\mathbf{Q}})$

Avantage : positivité réparée **localement**, $\mathcal{M}$ garantie **globalement**, **sans itérations**.

Annexe — Formulation de la Clôture IA

► Sources d'erreur

- Troncature spatiale (modes $k > r$).
- écart EF $\neq$ CORAL-SWE.

► Apprentissage du résidu

- Projection FOM : $\alpha_{\text{FOM}} = \mathbf{Z}_r^\top \mathbf{M}(\mathbf{Q}_{\text{FOM}} - \bar{\mathbf{Q}})$
- Cible : $\mathbf{R}(t) = \dot{\alpha}_{\text{FOM}} - \mathbf{G}(\alpha_{\text{FOM}})$

► Réseau $\mathcal{N}_\theta$

- Hors-ligne : $\mathcal{N}_\theta(\alpha) \approx \mathbf{R}(\alpha)$

Système ROM-IA final :

$$\dot{\alpha} = \mathbf{G}(\alpha) + \mathcal{N}_\theta(\alpha)$$

✓ **Sécurité :** $\mathcal{N}_\theta$ dans l'espace réduit (CPOD) + Correction Hybride *a posteriori* $\Rightarrow h \geq h_{\min}$ et $\mathcal{M} = M_{\text{target}}$ garantis.

Annexe—Quatre stratégies de projection contrainte

#1 Méthode Hybride (Notre proposition)

1. Polissage de $\mathcal{M}$ (hyperplan réduit).
2. Reconstruction + clipping ($h \geq h_{\min}$).
3. Redistribution sur zone mouillée.
4. Reprojection $\mathbf{M}$ -pondérée.

✓ Ultra-robuste ✓ Coût faible

#2 Algorithme de Dykstra

Projection ℓ_2 exacte sur $\mathcal{F} = \mathcal{H}_{\text{masse}} \cap \bigcap_i \mathcal{C}_{\text{pos},i}$.

✓ ℓ_2 -optimal Coût moyen

#3 Uzawa-QP (Primal-Dual)

Lagrangien avec λ (masse) et μ (positivité) :

$$\alpha^{k+1} = \alpha_{\text{unc}} - \lambda^k \mathbf{w} + \mathbf{z}_{r,h}^\top \mu^k$$

✓ Exact ✗ Pointes d'itérations

#4 LSPG-BE constraint (Implicite)

Minimisation du résidu Backward-Euler :

$$\min_{\alpha} \frac{1}{2} \|\mathbf{r}_{\text{BE}}(\alpha)\|_{\mathbf{M}}^2 \quad \text{s.c. } h \geq h_{\min}, \mathcal{M} = M_{\text{target}}$$

✓ Stabilité implicite ✗ Dérive pour r grand

✓ **Les 4 méthodes** garantissent $\mathcal{M} = M_{\text{target}}$ et $h \geq 0$. Comparaison sur le cas Ritter → diapositive suivante.